Wiederholung
Lösungen

1. Aufgabe:

☐ Das ist richtig. $\mathbb{Q}$ ist nicht offen, da in jeder Umgebung von $0 \in \mathbb{Q}$ auch irrationale Zahlen liegen. Außerdem ist $\mathbb{Q}$ nicht abgeschlossen, da die Folge $(1 + 1/n)^n$ rationaler Elemente gegen $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ konvergiert.

☐ Falsch. $\mathbb{N}$ ist abzählbar, eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und hat unendlich viele Elemente.

☐ Falsch, die Folge (a_n) mit

$$a_n = \begin{cases} n & , n \text{ ist gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

hat nur einen Häufungspunkt, aber konvergiert nicht, da sie nicht beschränkt ist.

☐ Wahr. Wir können umformen $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} - x_1$.

☐ Wahr. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, was stärker als konvergent ist.

2. Aufgabe: (*Vollständige Induktion*)

a) **Behauptung:** Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

IA: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}k^2 = 1^2 = 1 = (-1)^{1-1}\frac{1(1+1)}{2}$$

(Für $n = 0$ gilt auch $0 = 0$, falls $0 \in \mathbb{N}$)
IV: Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.
IS: Dann gilt auch für $n + 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 + (-1)^n(n+1)^2 \qquad \text{nach IV} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n-1}(n+1)\left(\frac{n}{2} - (n+1)\right) \\ &= (-1)^{n-1}(n+1)\cdot\frac{-2-n}{2} - (n+1) = (-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

b) **Beh.:** Für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

gilt

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n}$$

IA: Für $n = 1$ gilt

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{1-x} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = 1 \cdot 0! \cdot (1+x)^{-1} + 0!(1-x)^{-1}$$

IV: Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.
IS: Dann gilt auch für $n+1$

$$\begin{aligned} f^{n+1)}(x) &= ((-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} + (n-1)!(1-x)^{-n})' \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)(1+x)^{-n-1} + (n-1)!(-n)(-1)(1-x)^{-n-1} \\ &= (-1)^n \cdot n!(1+x)^{-(n+1)} + n!(1-x)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Damit ergibt die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}$$

3. Aufgabe: (*Zahlenfolgen*)

Vor.: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$
Beh.: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n > 0$ für alle $n \geq N$.
Bew.: Da (a_n) konvergent ist, gibt es für $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2}$$

und damit $0 < \frac{a}{2} < a_n$.

Zusatz: Die Umkehrung gilt nicht. Die Folgeglieder von $a_n = \frac{1}{n}$ sind positiv, der Grenzwert nicht.

4. Aufgabe: (*Reihen*)

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{-n}$ ist eine geometrische Reihe mit $|q| = |-3^{-1}| < 1$ und konvergiert damit.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ divergiert, da $\sqrt[n]{n^{-1}} \to 1, n \to \infty$, keine Nullfolge ist und damit das notwendige Kriterium nicht erfüllt ist.

Wir können abschätzen für $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{n^3 + n^5}{6n^8 + \sqrt{n}} \leq \frac{2n^5}{6n^8} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Da $\sum_n \frac{1}{3n^3}$ laut Vorlesung konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n^5}{6n^8+\sqrt{n}}$ nach Majorantenkriterium.

Wir betrachten den Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1, n \to \infty$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$ nach dem Quotientenkriterium absolut.

Wir können abschätzen $2^{(-1)^n - n} \leq 2^{1-n} = 2 \cdot 2^{-n}$. Die Reihe $\sum 2 \cdot 2^{-n} = 2 \sum 2^{-n}$ konvergiert als geometrische Reihe.

Mit dem Hinweis (den man z.B. damit beweisen könnte, dass $f(x) = x - \log(x)$ streng monoton steigend ist) kann man abschätzen

$$0 \leq \frac{\log(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

Da die Reihe über die obere Schranke konvergiert, konvergiert die letzte Reihe auch nach dem Majoranten-/Vergleichskriterium.

b) Bei der 1. Reihe berechnen wir den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/\sqrt{n}}{1/\sqrt{n+1}} = 1$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ für $x \in (-1, 1)$ absolut und für $|x| > 1$ nicht. In $x = -1$ konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium (nicht absolut) und für $x = 1$ nicht nach dem Minorantenkriterium.

Bei der 2. Reihe berechnen wir den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = +\infty$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle x absolut.

Bei der 3. Reihe berechnen wir den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3/2^n}{(n+1)^3/2^{n+1}} = 2$$

Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n$ für alle $x \in (-2, 2)$ absolut und für $|x| > 2$ nicht. Für $x = \pm 2$ ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot (\pm 1)^n$, die nicht konvergent nach dem notwendigen Kriterium ist.

5. Aufgabe: (*Komplexe Folgen und Reihen*)

a) Es ist

$$|q| = \left|\frac{i}{3-i}\right| = \frac{|i|}{|i-3|} = \frac{1}{\sqrt{10}} < 1$$

Damit ist $a_n = q^n$ eine Nullfolge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente geometrische Reihe.

b) Zeigen Sie, dass die Folge (b_n) mit

$$b_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

keine Cauchyfolge ist.

Es gilt

$$|b_{n+1} - b_n| = \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\right| = \left|\frac{3+4i}{5}\right|^n \left|\left(\frac{3+4i}{5}\right) - 1\right| = 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$$

Da der Abstand von 2 auf einander liegenden Folgenglieder nicht kleiner wird, kann (b_n) keine Cauchyfolge sein (Umkehrung gilt nicht!)

6. Aufgabe: (*Die Exponentialreihe*)

Wir formen um

$$\frac{e^{(x^2)}-1}{x^2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}-1}{x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-2}}{k!}$$

Da Potenzreihen laut Vorlesung stetig sind, kommt bei $x \to 0$ einfach der Reihenwert in $x = 0$ heraus der 1 ist. Analog zeigt man

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-2}}{(2k)!}} = \frac{0}{1} = 0$$

Integration

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

- ☐ Das ist falsch. Nach der Kettenregel ist $G'(x) = -e^{1/x}/x$.
- ☐ Das ist falsch. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

  ist im Intervall $[a, b]$ nicht integrierbar, $f^2(x) = 1$ schon.

- ☐ Das ist falsch, das gilt laut Vorlesung nur, wenn $f(x) \geq 0$ für alle x.

2. Aufgabe: (*Substitution und partielle Integration*)

Mit 2-facher partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x}\sin(2x)\ dx &= \frac{e^{3x}}{3}\sin(2x)\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 e^{3x}\cos(2x)\ dx \\ &= \frac{e^3\sin(2)}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}\cos(2x)}{3}\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 e^{3x}\sin(2x)\ dx\right) \\ &= \frac{e^3\sin(2)}{3} - \frac{2e^3\cos(2)}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}\int_0^1 e^{3x}\sin(2x)\ dx\end{aligned}$$

Umgestellt nach dem Integral ergibt sich

$$\int_0^1 e^{3x}\sin(2x)\ dx = \frac{9}{13}\left(\frac{e^3\sin(2)}{3} - \frac{2e^3\cos(2)}{9} + \frac{2}{9}\right)$$

Beim 2. Integral substituieren wir $u = x^3 + 1$ mit $du = 3x^2\ dx$ und berechnen damit

$$\int_0^1 \frac{x^5}{x^3+1}dx = \int_1^2 \frac{x^5}{u}\cdot\frac{du}{3x^2} = \int_1^2 \frac{x^3}{3u}\ du = \int_1^2 \frac{u-1}{3u}\ du = \int_1^2 \frac{1}{3} - \frac{1}{3u}\ du = \frac{u}{3} - \frac{\ln(u)}{3}\Big|_1^2 = \frac{1-\ln(2)}{3}$$

Beim 3. Integral substituieren wir $u = \sin(x) + \cos(x)$ mit $du = (\cos(x) - \sin(x))\ dx$, sodass

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\ dx = \int_1^1 \frac{-1}{u}\ du = 0$$

Beim 4. Integral benutzen wir wieder die Methode der partiellen Integration, sodass

$$\int_1^2 x^2\ln(x)\ dx = \frac{x^3}{3}\ln(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\ dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}$$

Beim letzten Integral substituieren wir $u = 1 + \sin(x)$ mit $du = \cos(x)\ dx$ und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)^3}{1+\sin(x)}\ dx = \int_1^2 \frac{\cos(x)^2}{u}\ du$$

Außerdem gilt $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2 = 1 - (u-1)^2 = 2u - u^2$ und damit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)^3}{1+\sin(x)}\ dx = \int_1^2 \frac{2u-u^2}{u}\ du = \int_1^2 2-u\ du = 2u - \frac{u^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{1}{2}$$

3. Aufgabe: (*Uneigentliche Integrale*)

Durch die Substitution $u = \sin(x)$ kann man die Stammfunktion $\sqrt{\sin(x)}$ des 1. Integranden herleiten und zeigen, dass das Integral existiert, da

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\ dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\ dx = \lim_{a\to 0^+} \sqrt{\sin(x)}|_a^{\pi/2} = \lim_{a\to 0^+} 1 - \sqrt{\sin(a)} = 1$$

Durch die Substitution $u = x - 1$ berechnen wir das 2. uneigentliche Integral

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{a\to 1^+} \int_{a-1}^1 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\ du = \lim_{a\to 1^+} \frac{2}{3}u^{3/2} + 2\sqrt{u}\bigg|_{a-1}^1 = \frac{5}{3}$$

Durch partielle Integration berechnen wir

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-\ln(x)}{x}\bigg|_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2}\ dx = \lim_{b\to\infty} \frac{-\ln(x)-1}{x}\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{-\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + 1 = 1,$$

wobei wir den Grenzwert des 1. Summanden mit L'Hospital erhalten haben.

4. Aufgabe: (*Kurven und ihre Länge*)

Wir berechnen

$$\gamma'(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 1)^\top \qquad \|\gamma'(t)\|_2 = \sqrt{2}\cosh(t)$$

und damit

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2\ dt = \sqrt{2}\sinh(t)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e - e^{-1}\right)$$

5. Aufgabe: (*Kurvenintegrale, Lehramts-Aufgabe*)

a) Mit $\varphi'(t) = (1,2)^\top, \|\varphi'(t)\|_= \sqrt{5}$ ergibt sich

$$\int_\gamma f\ ds = \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot \|\varphi'(t)\|_2\ dt = 10\int_0^1 t\ dt = 5$$

b) Es ist

$$\int_\gamma F\ d(x,y) = \int_0^1 (F(\varphi(t)|\varphi'(t))_2\ dt = \int_0^1 \left(\begin{pmatrix} t^{11} \\ t^6 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 5t^4 \end{pmatrix}\right)_2\ dt = \int_0^1 t^{11} + 5t^{10}\ dt = \frac{t^{12}}{12} + \frac{5t^{11}}{11}\bigg|_0^1 = \frac{71}{132}$$

6. Aufgabe: (*Funktionenfolgen, Bachelor-Aufgabe*)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1/n+nx^2} = 0$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge punktweise gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 0$. Angenommen die Folge ist auch gleichmäßig konvergent. Dann müsste der Abstand zwischen f_n und f bzgl. der Supremumsnorm für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren. Da aber

$$f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

ist, also

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}$$

ist, kann dies nicht gegen Null konvergieren. f_n ist nicht gleichmäßig konvergent.

7. Aufgabe: (*Satz von Fubini, Bachelor-Aufgabe*)

Wir berechnen erst wie in dem Tipp nach der Quotientenregel

$$\partial_y \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = f(x,y)$$

$$\partial_x \left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-x^2-y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2} = f(x,y)$$

Damit resultiert

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx\right) dy = \int_0^1 \left.\frac{-x}{x^2+y^2}\right|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{-1}{1+y^2}\, dy = -\arctan(y)|_0^1 = \frac{-\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy\right) dx = \int_0^1 \left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dy = \arctan(y)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Das ist kein Widerspruch zum Satz von Fubini, da f nicht stetig ist, wie die Folge $(1/n, 0)$ zeigt.

Musterlösung Mathenacht

Stetigkeit und Topologie

1 a) $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ist Cauchyfolge in $[-1,1]\times[-1,1]$ mit $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n} = 1$, somit ist die Folge in der ~~Mege~~ Menge. Es gilt $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ nach Analysis 1, aber ~~0/0~~ $\frac{0}{0} = 1$ ist falsche Aussage, somit ist $(0,0)$ nicht in M. Somit existiert eine Cauchyfolge in M, die nicht in M konvergiert $\Rightarrow$ M ist nicht folgenkompakt.

b) Wir müssen annehmen, dass A nicht die leere Menge ist. Sei $x \in A$ und $\delta > 0$, dann gibt es ein $\tilde{x} \in \mathbb{Q}$ in $B_\delta(x)$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. ~~Aufs~~ Aus selbigem Grund liegt ein $\hat{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $(x, \tilde{x})$ und somit in besagtem Ball. Folglich gilt $x \in \partial A$, d.h. A ist nicht offen.

c) Der Unterschied zwischen normaler Stetigkeit und Gleichmäßiger Stetigkeit ist, dass δ nur von ε und nicht von x_0 abhängen darf.

Nehmen wir an, f wäre nicht gleichmäßig stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$:
$\forall n \geq 1 \ \exists x_n, y_n \in [a,b]$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

Nach Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge von x_n, x_{n_k}, die in $[a,b]$ konvergiert da $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = p$

Aufgrund der Stetigkeit folgt $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f(p) - f(p) = 0 \geq \varepsilon$

$\rightarrow\leftarrow$ f ist folglich gleichmäßig stetig

d) Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt finden wir eine Cauchfolge in $\mathbb{Q}$, die gegen $\sqrt{2}$ konvergiert $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ und da der Grenzwert Eindeutig ist, ~~konv~~ konvergiert die Cauchyfolge nicht in $\mathbb{Q}$

Musterlösung Mathenacht

Stetigkeit und Topologie

2) a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto |x|$

Für $x \in (0, \infty)$: $|x| = Id(x) = x$, also eine stetige Funktion

Für $x \in (\infty, 0)$: $|x| = (-1) \cdot \underbrace{Id(x)}_{\text{stetige Funktion}}$

Eine stetige Funktion multipliziert mit $c \in \mathbb{R}$ (hier $= -1$) ist eine stetige Funktion

$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0 = |0|$ $\qquad \lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} -x = -\lim_{x \to 0-} x = -1 \cdot 0 = 0$

$|x|$ stetig in $0 \Rightarrow f$ ist stetig

b) $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x\|_2$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$ $\qquad$ Wir stellen x in Kugelkoordinaten dar, d.h.

$\underbrace{x_i := r \cdot \cos(\varphi_i) \prod_{k=0}^{i-1} \sin(\varphi_k)}_{\leq r}$ $\qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}: \cos\varphi, \sin\varphi \leq 1$

$\Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} r^2} = \sqrt{d \cdot r^2} = \sqrt{d} \cdot r \qquad \lim_{r \to 0} \sqrt{d}\, r = \sqrt{d} \cdot 0 = 0$

d.h. $\forall \varphi_i, i \in \{1, \dots, d\}$ geht $\|x\|_2 \xrightarrow{(x \to 0)} 0 \qquad (\|0_v\|_2 = 0)$

Die Funktion ist eine Komposition stetiger Funktionen, dass heißt, sie ist an allen anderen Stellen auch stetig

$\Rightarrow f$ ist stetig

c) Wir untersuchen den Übergang der beiden Teilfunktionen auf Stetigkeit. Dafür betrachten wir die Folge $(1+\frac{1}{n}, -1)_{n \in \mathbb{N}}$

Der Grenzwert dieser Folge ist offensichtlich $(1, -1)$ mit $f(1, -1) = 0$

$$f(1+\tfrac{1}{n}, -1) = \frac{(1+\frac{1}{n})^2 + 1^2}{(1+\frac{1}{n})^3 + (-1)^3} = \frac{(1^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{(1+\frac{1}{n})(1^2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) - 1} \geq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to \infty$$

Die Funktion ist folglich nicht stetig

d) Wir betrachten die Funktion in Polarkoordinaten:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \sin\varphi \\ \rho \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}, \; \rho \in \mathbb{R}^+, \; \varphi \in [0, 2\pi)$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 \cdot \sin^2\varphi + \rho^2 \cdot \cos^2\varphi}} = \frac{\rho^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\rho} = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \leq \rho \to 0$$

Musterlösung Mathenacht

Stetigkeit und Topologie

3) a) $f:[a,b] \to [a,b]$ stetig besitzt einen Fixpunkt

$\Leftrightarrow$ $f - Id_{[a,b]} = 0$ an einer Stelle. $f - Id_{[a,b]}$ ist eine komposition stetiger funktionen

$f(a) \in [a,b] \Rightarrow (f - Id)(a) \in [0, b-a]$

$f(b) \in [a,b] \Rightarrow (f-Id)(b) \in [a-b, 0]$

$\Rightarrow$ ~~$f(a) \geq 0$~~ $(f-Id)(a) \geq 0$, $(f-Id)(b) \leq 0$. Damit folgt nach Zwischenwertsatz, dass es ein $x \in [a,b]$ gibt mit $(f-Id)(x) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = x$

b) $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq L$ Wähle L als $\max_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_0 \in (x,y)$ mit

$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq |f'(x_0)| \leq L$

Musterlösung Mathenacht

Stetigkeit und Topologie

4) a) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f: X \to X$. Dann heißt f eine Kontraktion genau dann, wenn gilt:

$d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

Ein Punkt x heißt Fixpunkt einer Funktion von $f: A \to A$, wenn $f(x) = x$

b) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto e^{a \cdot \log(x+b)}$

$$f_1(x) = e^{a \cdot \log(x+b)} = x \iff \log x = a \cdot \log(x+b)$$
$$= \log((x+b)^a)$$

d.h. $x = (x+b)^a$ $\cancel{\iff x^{\frac{1}{a}} = x+b \iff x^{\frac{1}{a}} x^{-1} = b}$ ist Fixpunktbedingung

$\iff x^{\frac{1}{a}-1} = b = x^{\frac{1-a}{a}}$ ist der Fixpunkt

$$\frac{|e^{a \cdot \log(x+b)} - e^{a \cdot \log(y+b)}|}{|x-y|} < L \,?$$

Dafür untersuchen wir $f'(x) = \dfrac{a \cdot e^{a \log(x+b)}}{x+b} \xrightarrow{(x \to -b)} \infty$

Mit dem Mittelwertsatz folgt, es gibt x,y ~~mit~~ bei denen der Differenzenquotient echt größer als 1 ist.

f_2 ist keine Selbstabbildung und hat darum auch keinen Fixpunkt.

Wir betrachten die Punkte $\left(\frac{1}{64}, 0\right), \left(\frac{1}{32}, 0\right)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{64}} - \frac{1}{\sqrt{32}}\right| = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{8}$ mit $\left|\frac{1}{64} - \frac{1}{32}\right| = \frac{1}{64}$

mit $\dfrac{\frac{-1+\sqrt{2}}{8}}{\frac{1}{64}} = -8 + 8\sqrt{2} > 1$ folgt, dass f keine Kontraktion ist

c) $f_3: \dfrac{x+0{,}5}{x+1} \Rightarrow f_3' = \dfrac{1}{2(x+1)^2}$ monoton fallend, $f'(0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall x,y \in [0,\infty): \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq \dfrac{1}{2}$. Also ist f_3 eine Kontraktion

Folglich besitzt f_3 einen Fixpunkt

Musterlösung Mathenacht

Stetigkeit und Topologie

5) a) $\forall (x,y) \in X$: $d(x,y)=1 \vee d(x,y)=0$ $\quad 1\geq 0,\ 0\geq 0$

Positive Definitheit erfüllt

Sei $x=y$ $\quad d(x,y)=d(x,x)=d(y,x)$

Sei $x\neq y$ $\quad d(x,y)=1=d(y,x)=1$

Symmetrie erfüllt

$d(x,y)\leq d(x,c)+d(c,y)$, wenn $x=y=c$ dann ist alles

0, wenn $x=y\neq c \Rightarrow 0\leq 2$

Wenn x oder $y=c \Rightarrow 1\leq 1$

Wenn $x\neq y\neq c\neq x \Rightarrow 1\leq 2$

Dreiecksungleichung erfüllt

$\Rightarrow d$ ist eine Metrik

b) Betrachten wir den Vektor $(-1,0)$ so ist $\|(-1,0)\|=0$,

obwohl es ~~nicht~~ nicht der Nullvektor ist

$\|(-1,-2)\|=-1$ Somit ist die Positive Definitheit nicht erfüllt

$\|(1,2)\|=2$, aber $\|((-1)\cdot(1,2))\|=-1$

$\|x+y\| = \max_{x\in\{1,..,d\}}(x_i+y_i) \leq \max x_i + \max y_i = \|x\|+\|y\|$

Das heißt die Dreiecksungleichung ist erfüllt

c) Die Abbildung

$\|\cdot\|_2 : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad c \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{d}|z_i|^2}$ mit $|z_i| := \sqrt{Re(z_i)^2+Im(z_i)^2}$

ist eine Norm

Die Positive Definitheit folgt aus der Definition (wegen der

Quadrate) ebenso $\|c\|=0 \Leftrightarrow c=0$

Die Homogenität und die Dreiecksungleichung folgen analog

zur Euklidischen Norm im $\mathbb{R}^d$

Musterlösung Mathematik

Stetigkeit und Topologie

6) a) $A \subset \mathbb{R}^d$ ist eventuell offen, ~~alt~~ also im allgemeinen nicht kompakt, aber $\bar{A} = A \cup \partial A$ ist abgeschlossen. Da A beschränkt ist, ist $\bar{A}$ kompakt (~~BoZ~~ Bolzano-Weierstraß). Somit hat c_n eine Teilfolge, die in $\bar{A}$ konvergiert (da Kompaktheit Folgenkompaktheit impliziert). Somit liegt der Häufungspunkt von c_n in A oder in ∂A

b) $\bar{A} \setminus A^\circ \Rightarrow x \in (A \cup \partial A) \wedge x \notin A^\circ$

$x \in \bar{A} \setminus (A \setminus \underbrace{(A^\circ)^c}_{x \in X \setminus A \,\vee\, x \in \partial A})$

$x \in A \setminus (A^\circ)^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin X \setminus A \wedge x \notin \partial A$

$\Leftrightarrow x \in A^\circ$ weil $\bar{A} = \partial A \cup A$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \setminus A^\circ$ (linke Seite)

$\square$

c) Sei $x \in (X \setminus A)^\circ$

$\Leftrightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subset X \setminus A$

$\Leftrightarrow B_r(x) \subset X \wedge B_r(x) \cap A = \emptyset$

$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin \partial A$ (beim Rand wäre der Schnitt nicht leer)

$\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin \bar{A}$

$\Leftrightarrow x \in X \setminus \bar{A}$

Differentialrechnung Lösungen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

☐ Das ist falsch. Es gibt auch monotone Funktion, die nicht differenzierbar sind.

☐ Das ist falsch. x^3 ist streng monoton steigend, aber die Ableitung in 0 ist 0.

☐ Das ist wahr.

☐ Das ist wahr.

2. Aufgabe: (*Totale und partielle Differenzierbarkeit*)

a) Es gilt

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq 0 \\ \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(1/t^2) = 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq 0 \\ \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t\sin(1/t^2) = 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

wobei die Grenzwerte z.B. durch das Sandwich-Theorem begründet werden können.

Für die Folgen $a_n = (1/\sqrt{2\pi n}, 0)$ und $b_n = (0, 1/\sqrt{2\pi n})$, die gegen Null konvergieren, gilt

$$\partial_x f(a_n) = -2\sqrt{2\pi n} \to -\infty \qquad \partial_y f(b_n) = -2\sqrt{2\pi n} \to -\infty$$

Damit sind die partiellen Ableitungen nicht stetig. Die Funktion ist aber mit der Jacobimatrix $f'(0,0) = (0,0)$ differenzierbar, da

$$\frac{\|f(x,y) - f(0,0) - f'(0,0)\cdot((x,y)-(0,0))\|_2}{\|(x,y)-(0,0)\|_2} = \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \to 0$$

für $(x,y)\to(0,0)$ (Wieder Sandwich-Theorem).

b) 1.Fall: Sei $v = (v_1, v_2)$ mit $v_1 \neq 0$. Dann gilt

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2v_1^2+t^4v_2^4} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{v_1v_2^2}{v_1^2+t^2v_2^4} = \frac{v_2^2}{v_1}$$

2.Fall: Sei $v = (0, v_2)$ mit $v_2 \neq 0$. Dann gilt

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Damit existiert in jede Richtung die Richtungsableitung, insbesondere die partiellen Ableitungen. Die Funktion ist aber nicht stetig in $(0,0)$, da für die Folge $a_n = (1/n^2, 1/n) \to (0,0)$ gilt

$$f(a_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

Wenn f nicht stetig ist, dann kann es auch nicht differenzierbar sein.

3. Aufgabe: (*Mehrdimensionale Kettenregel*)

Wir setzen ein

$$g \circ f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2y^2 - xy^3} \\ \sin(x-y)\cos(xy^3) \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \qquad g'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$g'(f(x,y)) = \begin{pmatrix} xy^2 e^{x^2y^2-xy^3} & (x-y)e^{x^2y^2-xy^3} \\ \cos(x-y)\cos(xy^2) & -\sin(x-y)\sin(xy^2) \end{pmatrix}$$

Die Kettenregel besagt

$$(g \circ f)'(x,y) = g'(f(x,y)) \cdot f'(x,y) =$$

$$\begin{pmatrix} e^{x^2y^2-xy^3}(2xy^2 - y^3) & e^{x^2y^2-xy^3}(xy^2 - 2xy^3) \\ \cos(x-y)\cos(xy^2) - y^2\sin(x-y)\sin(xy^2) & -\cos(x-y)\cos(xy^2) - 2xy\sin(x-y)\sin(xy^2) \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe: (*Extremwerte*)

a) Es gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2xy + y^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für die kritischen Stellen $a_1 = (2,0)$, $a_2 = (-2,0)$, $a_3 = (2,-4)$ und $a_4 = (-2,4)$. Wir werten die Hessematrix

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x+2y \end{pmatrix}$$

in diesen Punkten aus.

- $$f''(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

  hat einen negativen und positiven EW und damit ist a_1 kein lokales Extrema (Mit $(1,-1)^\top, (0,1)^\top$ gibt es Vektoren, für die $v^\top f''(a_1)v$ einmal positiv und einmal negativ werden)
- Analog ist a_2 auch kein lokales Extrema

- $$f''(a_3) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

  hat 2 negative Eigenwerte und damit ist a_3 ein lokales Maximum (oder: der 1. Eintrag ist negativ und die Determinante größer Null)

- $$f''(a_4) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

  hat 2 positive Eigenwerte und damit ist a_3 ein lokales Minimum (oder: der 1. Eintrag ist positiv und die Determinante größer Null).

  Globale Extrema existieren nicht. Wenn man sich z.B.

  $$f(0, y) = \frac{1}{3}y^3 - 4y$$

  anschaut, werden die Funktionswerte für $y \to \pm\infty$ beliebig groß oder klein.

b) Alle lokalen Extremwerte aus a) liegen in der Menge. Damit hat man alle lokalen Extrema bestimmt. Da D kompakt ist, nimmt diesmal die stetige Funktion f auch ihre globalen Extremwerte an. Diese können auf dem Rand liegen. D.h., wir müssen alle Funktionswerte für $x = 0$ oder $x = 5$ oder $y = 0$ oder $y = 5$ mit den Funktionswerten in den lokalen Extrema vergleichen.

5. Aufgabe: (*Mittelwertsatz*)

Wir berechnen

$$f'(t) = \frac{2\sqrt{t+1} - 2 - t}{2(t+1)^{3/2}}$$

Der Nenner ist für alle $t > 0$ positiv und der Zähler negativ, da

$$2\sqrt{t+1} < 2 + t \quad \Rightarrow \quad 4t + 4 < 4 + 4t + t^2 \quad \Rightarrow \quad 0 < t^2$$

Damit ist $f'(t) < 0, t > 0$ und f streng monoton fallend. Es gilt also

$$f(x) \leq f(0) = 0$$

und daher die Behauptung.

Anwendungen
Lösungen

1. Aufgabe:

- ☐ Das ist wahr.
- ☐ Das ist falsch. f, g mit $f(x) = x = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sind bijektiv, aber $h(x) = (x, x)$ nicht, da $(1, 2)$ kein Urbild hat
- ☐ Das ist wahr. Zum Beispiel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ erfüllt die Bedingungen.
- ☐ Das ist falsch. Eine stetige Funktion auf einer kompakten (abgeschlossen und beschränkt) Menge nimmt immer ihr Minimum und Maximum an.

2. Aufgabe: (*Taylorpolynome*)

a) Wir berechnen

$$f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$$
$$f''(x) = \frac{-\sin(x)x^2 - 2\cos(x)x + 2\sin(x)}{x^3}$$

mit $f(\pi) = 0, f'(\pi) = -1/\pi, f''(\pi) = 2/\pi^2$ und setzen ein

$$T_1 f(x, \pi) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) = 1 - \frac{x}{\pi}$$
$$T_2 f(x, \pi) = T_1 f(x, \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 = 2 - \frac{3x}{\pi} + \frac{x^2}{\pi^2}$$

Wir geben eine obere Schranke für $f''(x), x \in I$, an durch

$$\begin{aligned}
|f''(x)| &\leq \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} && \textit{Dreiecksu., Sinus, Kosinus} \\
&\leq \frac{6}{5\pi} + \frac{2 \cdot 6^2}{25\pi^2} + \frac{2 \cdot 6^3}{5^3\pi^3} && x \in I \\
&\leq \frac{6}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 6^2}{25 \cdot 3^2} + \frac{2 \cdot 6^3}{5^3 \cdot 3^3} && \pi > 3 \\
&= \frac{106}{125} < 1
\end{aligned}$$

Damit gilt für alle $x \in I$ nach dem Restglied von Lagrange, dass es eine Stelle ξ zwischen π und x gibt mit

$$|f(x) - T_1 f(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2!}(x - \pi)^2 < \frac{(x - \pi)^2}{2} \leq \frac{(\pi/6)^2}{2} = \frac{\pi^2}{72} < \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

b) Mit

$$\partial_x f(x,y) = \cos(x)\cos(y) \qquad \partial_y f(x,y) = -\sin(x)\sin(y)$$

und $\partial_x f(0,0) = 1, \partial_y f(0,0) = 0$ erhalten wir

$$T_1 f((x,y),(0,0)) = f(0,0) + \partial_x f(0,0)(x-0) + \partial_y f(0,0)(y-0) = x$$

Laut Vorlesung ist

$$|f(x) - T_1 f(x,y)| = |\sin(x)\cos(y) - x| = \frac{|x^\top Hf(\xi)x|}{2!}$$

mit der 2. Ableitung an einer Zwischenstelle ξ

$$Hf(\xi) = \begin{pmatrix} -\sin(\xi_1)\cos(\xi_2) & \cos(\xi_1)\sin(\xi_2) \\ \cos(\xi_1)\sin(\xi_2) & -\sin(\xi_1)\cos(\xi_2) \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$|f(x) - T_1 f(x,y)| = |\sin(x)\cos(y) + x| = \frac{|x^\top Hf(\xi)x|}{2!} \le \frac{x_1^2 + 2|x_1 x_2| + x_2^2}{2} \le \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},$$

also

$$\frac{|f(x) - T_1 f(x,y)|}{\|(x,y)\|_2} \le \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2} \to 0, \quad \text{für } (x_1,x_2) \to (0,0)$$

Das ist die Behauptung.

3. Aufgabe: (*Umkehrsatz und implizite Funktionen*)

a) Die Funktion ist nicht injektiv, da

$$f(0,0) = f(0,2\pi)$$

Da

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} e^{x_1}\cos(x_2) & -e^{x_1}\sin(x_2) \\ e^{x_1}\sin(x_2) & e^{x_1}\cos(x_2) \end{pmatrix} \qquad f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, gibt es laut dem Umkehrsatz so eine Funktion. Man könnte z.B. die offene Kugel $U = B(0,1)$ wählen.

b) Wir definieren

$$F(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4 - x - z = 0$$

mit $F(1,0,1) = 1 + 0 + 1 - 1 - 1 = 0$ und berechnen

$$\partial_z F(x,y,z) = 4z^3 - 1 \qquad \partial_z F(1,0,1) = 3 \neq 0$$

Laut dem Satz über die implizite Funktion ist $F(x,y,z) = 0$ nahe P nach $z = g(x,y)$ umstellbar. Laut Vorlesung gilt

$$\partial_y g(x,y) = -\frac{\partial_y F(x,y,g(x,y))}{\partial_z F(x,y,g(x,y))} \qquad \partial_y g(1,0) = -\frac{0}{3} = 0$$

c) Wir definieren

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ xz + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \partial_y F_1 & \partial_z F_1 \\ \partial_y F_2 & \partial_z F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$$

Es gilt $F(P) = (0 + 1 - 1, 0 + 0.5 - 0.5)^\top = (0,0)^\top$ und

$$\begin{pmatrix} \partial_y F_1(0,1,-1) & \partial_z F_1(0,1,-1) \\ \partial_y F_2(0,1,-1) & \partial_z F_2(0,1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, da es die Determinante $-1 \neq 0$ hat. Nach dem Satz über die implizite Funktion ist $F(x,y,z) = 0$ nahe P eindeutig nach $y = g(x)$ und $z = h(x)$ umstellbar

4. Aufgabe: (*Lagrangesche Multiplikatorenmethode und Untermannigfaltigkeiten*)

a) f ist als Polynom in jeder Variable stetig und M ist kompakt, da es als Nullstellenmenge einer stetigen Funktion abgeschlossen ist und beschränkt ist, weil für alle $(x, y, z) \in M$ gilt

$$\|(x, y, z)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} = 1$$

Nach dem Satz vom Minimum und Maximum nimmt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an.

b) Wir suchen (x, y, z) und λ, sodass

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$$

Wir erhalten 4 Lösungen des Gleichungssystems

$$a_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{6}\right) \qquad a_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{6}\right) \qquad a_3 = \left(0, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}\right) \qquad a_3 = \left(0, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}\right)$$

mit

$$f(a_1) = f(a_2) = \frac{9}{2} \qquad f(a_3) = \sqrt{18} \qquad f(a_4) = -\sqrt{18}$$

Damit ist das Minimum von f auf M $-\sqrt{18}$ und das Maximum $9/2$.

c) Wir definieren $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1$$

Dann ist f die Nullstellenmenge von M und die Jacobi-Matrix von f

$$Df(x, y, z) = (2x, 2y, 4z)$$

hat immer Rang 1 auf M, da $(0, 0, 0) \notin M$. Nach 24.5. der Vorlesung ist M eine $3-1 = 2$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe: (*Extremwerte und konvexe Funktionen, Bachelor-Aufgabe*)

a) f ist als Verknüpfung von stetig differenzierbaren Funktionen stetig differenzierbar. Die Hessematrix ist

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 2\cos(y) & -2x\sin(y) \\ -2x\sin(y) & 2 - x^2\cos(y) \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nach dem Haupt-Minorenkriterium, dass die Matrix positiv-definit ist (1. Eintrag positiv und Determinante positiv). Der 1. Eintrag ist positiv, da für $y \in (-1, 1)$ der Kosinus größer als Null ist. Die Determinante kann man auch abschätzen

$$24x^2 + 4\cos(y) - 12x^4\cos(y) - 2x^2\cos(y)^2 - 4x^2\sin(y)^2 \leq 24x^2 + 4\cos(y) - 12x^2 - 2x^2 - 4x^2 = 6x^2 + 4\cos(y) > 0$$

Da die Hessematrix positiv definit ist, ist f laut Vorlesung konvex.

b) Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine konvexe Menge M und eine stetig differenzierbare, konvexe Funktion f jeder stationäre Punkt sofort das globale Minimum ist.

c) Da die Jacobimatrix

$$Df(x, y) = (4x^3 + 2x\cos(y), 2y - x^2\sin(y))$$

für $(0, 0) \in M$ Null wird, ist dieser stationäre Punkt nach b) das Minimum mit $f(0, 0) = 0 = \min(f)$.